



Lisbon School  
of Economics  
& Management  
Universidade de Lisboa

# Estatística I

Licenciatura em Gestão e Licenciatura em Finanças  
2.º Ano/2.º Semestre  
2023/2024

# Aulas Teóricas N.ºs 10 e 11 (Semana 6)

**Docente:** Elisabete Fernandes

**E-mail:** efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

# Conteúdos Programáticos

## Aulas Teóricas (Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 2:**  
Probabilidades

## Aulas Teóricas (Semanas 3 a 5)

- **Capítulo 3:** Variáveis  
Aleatórias  
Unidimensionais

## Aulas Teóricas (Semanas 5 a 7)

- **Capítulo 4:** Variáveis  
Aleatórias  
Multidimensionais

## Aulas Teóricas (Semanas 8 a 13)

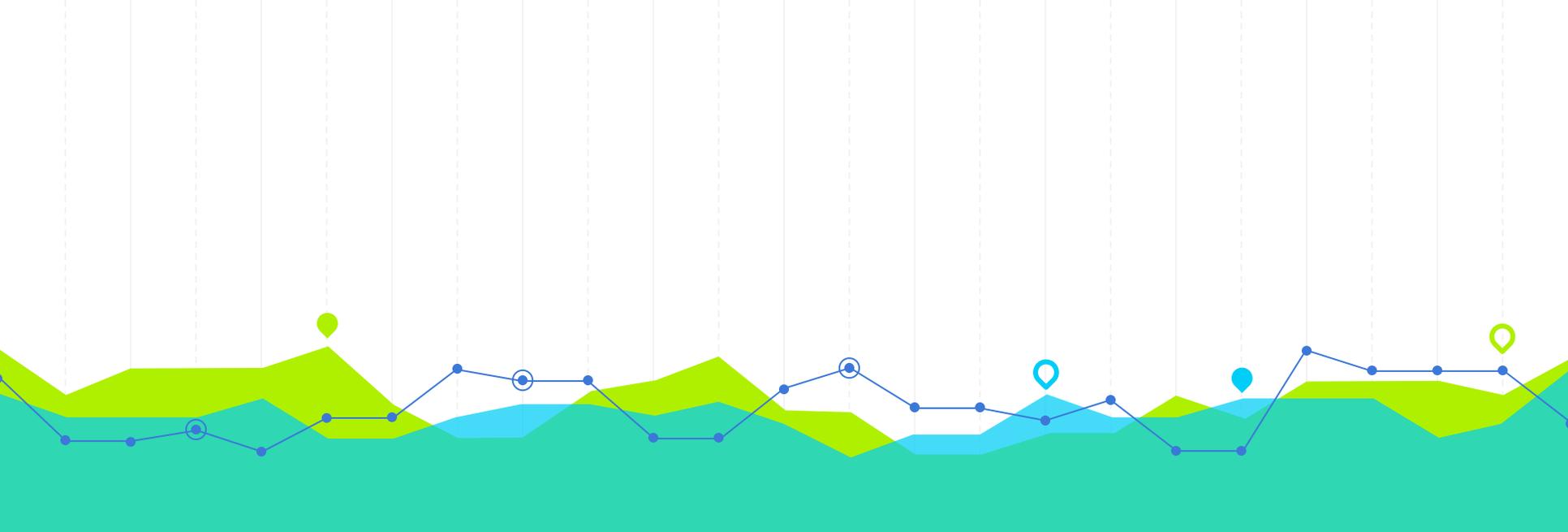
- **Capítulo 5:**  
Distribuições Teóricas
- **Capítulo 6:**  
Amostragem.  
Distribuições por  
Amostragem.

**Material didático:** Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

**Bibliografia:** B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>

Aula 9	Coeficiente de assimetria e coeficiente de kurtosis. Exemplo. Quantil de ordem alfa para distribuições contínuas. Mediana como medida de localização, amplitude inter-quartis como medida de dispersão. Exemplo.
Aula 10	<b>Início do capítulo 3:</b> Variáveis aleatórias bidimensionais. Função de distribuição conjunta, propriedades. Funções de distribuição marginais. Independência de variáveis aleatórias.  Variáveis aleatórias bidimensionais discretas. Função probabilidade conjunta.
	Propriedades. Função probabilidade marginal. Exemplo.
Aula 11	Variáveis bidimensionais discretas: independência. Variáveis bidimensionais contínuas: função densidade conjunta e funções densidade marginais. Independência.  Função probabilidade condicionada. Propriedades. Exemplo.
Aula 12	Função densidade. Função densidade de probabilidade condicionada. Propriedades. Exemplo.



# Pares Aleatórios Discretos

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;  
Independência; Covariância e Correlação

1

# Par Aleatório Discreto

## PAR ALEATÓRIO

A um vector aleatório de dimensão 2 chamamos um **par aleatório** ou **variável aleatória bidimensional**.

### Par aleatório discreto:

Um par aleatório diz-se discreto quando ambas as componentes são v.a.'s discretas. Assim  $(X,Y)$  é um par aleatório discreto quando os domínios de existência das v.a.'s  $X$  e  $Y$  são conjuntos finitos ou infinitos numeráveis.

# Função de Probabilidade Conjunta

A função de probabilidade conjunta do par aleatório  $(X,Y)$  é uma função  $f(x,y)$  que associa a cada elemento de  $\mathbb{R}^2$  uma probabilidade,

$$f(x,y) = p_{ij} = P[X = x, Y = y].$$

Verifica as seguintes propriedades:

1.  $0 \leq f(x,y) \leq 1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2;$
2.  $\sum_i \sum_j f(x_i, y_j) = 1.$

# Função de Probabilidade Conjunta: Exemplo

**Exemplo 6.** Uma moeda equilibrada tem o algarismo 1 desenhado numa das faces e o algarismo 2 desenhado na outra face. A moeda é lançada ao ar duas vezes. Seja a v.a.  $X$  – soma dos dois números observados nos lançamentos e a v.a.  $Y$  – diferença dos mesmos números (o primeiro menos o segundo).

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

↓   ↓   ↓   ↓

$$(X,Y) = (2,0) (3,-1) (3,1) (4,0)$$

Assim temos :

$$P[X = 2, Y = 0] = \frac{1}{4}; \quad P[X = 3, Y = -1] = \frac{1}{4};$$

$$P[X = 3, Y = 1] = \frac{1}{4}; \quad P[X = 4, Y = 0] = \frac{1}{4}.$$

A função de probabilidade conjunta, por vezes é representada através de um quadro.

Para o exemplo a função de probabilidade conjunta de  $(X,Y)$  vem:

$X \setminus Y$	-1	0	1
2	0	1/4	0
3	1/4	0	1/4
4	0	1/4	0

# Funções de Probabilidade Marginais

Apesar de no par aleatório se proceder ao estudo em conjunto de duas variáveis aleatórias, isso não impede que se possa estudar probabilisticamente cada variável componente em separado. De facto é possível obter as funções de probabilidade das variáveis  $X$  e  $Y$ , individualmente, e a que damos o nome de funções de probabilidade marginais:

**Função de probabilidade marginal de  $X$ ,**

$$f_X(x) = P[X = x, -\infty < Y < +\infty] = \sum_y f(x, y)$$

**Função de probabilidade marginal de  $Y$**

$$f_Y(y) = P[-\infty < X < +\infty, Y = y] = \sum_x f(x, y)$$

# Funções de Probabilidade Marginais: Exemplo

## Exemplo 7 (continuação)

Podemos calcular as probabilidades marginais, isto é, calcular a função de probabilidade de X e Y usando a função de probabilidade conjunta.

Assim,

$$P[X = 2] = P[\{(X = 2) \cap \{Y = -1\}\} \cup \{(X = 2) \cap \{Y = 0\}\} \cup \{(X = 2) \cap \{Y = 1\}\}] = \\ = P[X = 2, Y = -1] + P[X = 2, Y = 0] + P[X = 2, Y = 1] = \frac{1}{4},$$

$$P[X = 3] = P[\{(X = 3) \cap \{Y = -1\}\} \cup \{(X = 3) \cap \{Y = 0\}\} \cup \{(X = 3) \cap \{Y = 1\}\}] = \\ = P[X = 3, Y = -1] + P[X = 3, Y = 0] + P[X = 3, Y = 1] = \frac{1}{2},$$

$$P[X = 4] = P[\{(X = 4) \cap \{Y = -1\}\} \cup \{(X = 4) \cap \{Y = 0\}\} \cup \{(X = 4) \cap \{Y = 1\}\}] = \\ = P[X = 4, Y = -1] + P[X = 4, Y = 0] + P[X = 4, Y = 1] = \frac{1}{4},$$

Pelo que, a função de probabilidade marginal de X é,

$$X = \begin{cases} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

X \ Y	-1	0	1	
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	1/4	1/2
4	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	1

função de probabilidade marginal de X  
(soma de linha)

função de probabilidade marginal de Y  
(soma de coluna)

# Funções de Probabilidade Marginais: Exemplo

X \ Y	-1	0	1	
2	0	1/4	0	1/4
3	1/4	0	1/4	1/2
4	0	1/4	0	1/4
	1/4	1/2	1/4	1

função de probabilidade marginal de X  
(soma de linha)

função de probabilidade marginal de Y  
(soma de coluna)

Da mesma forma obtemos,

$$P[Y = -1] = \frac{1}{4}, \quad P[Y = 0] = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P[Y = 1] = \frac{1}{4},$$

A função de probabilidade marginal de Y será,

$$Y = \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

Elementos de Estatística e Probabilidades II (uevora.pt)

O quadro da distribuição de probabilidade conjunta de (X,Y) pode agora ser completado com mais uma linha e uma coluna para as probabilidades marginais das v.a.'s X e Y.

# Funções de Probabilidade Condicionais

Sabemos que:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

Definindo:

$A \rightarrow$  o evento onde  $X = x$

$B \rightarrow$  o evento onde  $Y = y$

A distribuição de probabilidade de  $X$  isolado e  $Y$  isolados são:

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \quad \text{e} \quad h(y) = \sum_x f(x, y) \quad \text{variável discreta}$$

Temos que:

$$P(Y = y / X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} = \frac{f(x, y)}{g(x)}, \quad g(x) > 0$$

ou ainda

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \quad h(y) > 0$$

# Funções de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a função de probabilidade conjunta  $f(x,y)$  apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de  $X$  dado que  $Y=1$  e considere esse resultado para calcular  $P(X=0|Y=1)$ .

$f(x,y)$		X			
		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

[www.cearidus.ufc.br/Arquivo](http://www.cearidus.ufc.br/Arquivo)

$$P(X = 0) = g(0) = \sum_{y=0}^2 f(0, y) = f(0, 0) + f(0, 1) + f(0, 2) = 10/28$$

$$P(X = 1) = g(1) = \sum_{y=0}^2 f(1, y) = f(1, 0) + f(1, 1) + f(1, 2) = 15/28$$

$$P(X = 2) = g(2) = \sum_{y=0}^2 f(2, y) = f(2, 0) = 3/28$$

Função massa de probabilidade de  $X$ :

x	0	1	2
$g(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

= distribuição de probabilidade marginal de  $X$ .

# Funções de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a função de probabilidade conjunta  $f(x,y)$  apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de  $X$  dado que  $Y=1$  e considere esse resultado para calcular  $P(X=0|Y=1)$ .

$f(x,y)$		X			
		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

Mas usando a definição:

$$P(X = x / Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)} = \frac{f(x,y)}{h(y)},$$

por definição:  $h(y) = \sum_x f(x,y)$

$$P(x = 0/y = 1) = \frac{6/28}{12/28} = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 1/y = 1) = \frac{6/28}{12/28} = \frac{1}{2}$$

$$P(x = 2/y = 1) = \frac{0}{12/28} = 0$$

# Independência entre as Variáveis Aleatórias

Dada uma v.a. bidimensional  $(X,Y)$ , as v.a. unidimensionais que a integram,  $X$  e  $Y$ , dizem-se independentes se

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \forall (x,y).$$

# Independência Estatística

(Dedução com analogia Teoria das Probabilidades)

Sabemos que:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow f(x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)}$$

Mas se A e B forem independentes:

$$P(A/B) = P(A) \Rightarrow f(x/y) = g(x)$$

Assim,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$$

Sejam  $x$  e  $y$  duas variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com distribuição de probabilidade conjunta  $f(x, y)$  e distribuição de probabilidade marginais  $g(x)$  e  $h(y)$ , respectivamente. As variáveis aleatórias  $x$  e  $y$  são consideradas Estatisticamente Independentes se e somente se:

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

para todos  $(x, y)$  dependendo do intervalo).

[www.cearidus.ufc.br/Arquivo](http://www.cearidus.ufc.br/Arquivo)

# Independência Estatística

## Generalização

Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n$  variáveis aleatórias (discretas ou contínuas) com distribuição de probabilidade conjunta  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  e distribuição de probabilidade marginais  $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n)$ , respectivamente. As variáveis aleatórias,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , são ditas Estatisticamente Independentes se e somente se:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$$

# Independência Estatística: Exemplo

Mostre que as variáveis aleatórias do exemplo ① não são estatisticamente independentes.

$$f(x, y) \stackrel{?}{=} g(x) \cdot h(x)$$

		X			
f(x, y)		0	1	2	
y	0	3/28	9/28	3/28	15/28
	1	6/28	6/28	-	12/28
	2	1/28	-	-	1/28
		10/28	15/28	3/28	1

[www.cearidus.ufc.br/Arquivo](http://www.cearidus.ufc.br/Arquivo)

Vamos verificar em um par  $(x, y)$

Suponha  $(0, 0)$

$$f(x, y) = f(0, 0) = 3/28$$

$$g(0) = 10/28$$

$$h(0) = 15/28$$

Vemos que:

$$\frac{3}{28} \neq \frac{10}{28} \cdot \frac{15}{28}$$

**não são estatisticamente independentes.**

# Valor Médio do Par Aleatório

## Valor esperado:

Seja  $X$  uma variável aleatória. O **valor esperado**, **média** ou **esperança matemática** de  $X$ , que denotamos por  $E[X]$  (também representado por  $\mu_x$  ou  $\mu$ ), quando existe, define-se por

$$E[X] = \sum_i x_i f(x_i) \quad \text{se } X \text{ é uma variável aleatória discreta,}$$

## Propriedades do valor esperado:

Dadas  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias, e seja  $k$  uma constante real,

- $E[k] = k$ ;
- $E[kX] = k E[X]$ ;
- $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$ ;
- $E[XY] = E[X] \cdot E[Y] + \text{Cov}[X, Y]$

Se  $X$  e  $Y$  forem independentes então  $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$

# Variância do Par Aleatório

## Variância:

Seja  $X$  uma variável aleatória. A variância de  $X$ , que denotamos por  $\text{Var}[X]$  (também representada por  $\sigma_X^2$  ou simplesmente  $\sigma^2$ ), é definida por:

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2],$$

ou seja,

$$\text{Var}[X] = \sum_i (x_i - \mu_X)^2 \cdot f(x_i) \quad \text{se } X \text{ é uma v.a. discreta,}$$

## Propriedades da variância:

Dadas  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias, e seja  $k$  uma constante real,

- $\text{Var}[k] = 0$ ;
- $\text{Var}[kX] = k^2 \text{Var}[X]$ ;
- $\text{Var}[X \pm Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \pm 2\text{Cov}[X, Y]$ ;

Se  $X$  e  $Y$  forem independentes então  $\text{Var}[X \pm Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

- $\text{Var}[X] = E[X^2] - E^2[X]$

Onde,

$$E[X^2] = \sum_i x_i^2 f(x_i) \quad \text{se } X \text{ é uma variável aleatória discreta,}$$

# Covariância do Par Aleatório

## Covariância:

A **covariância** entre  $X$  e  $Y$ , representa-se por  $\text{Cov}(X, Y)$  ou simplesmente  $\sigma_{X, Y}$ , e define-se como

$$\text{Cov}[X, Y] = \sigma_{X, Y} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)],$$

ou seja,

$$\text{Cov}[X, Y] = \sum_i \sum_j (x_i - \mu_X)(x_j - \mu_Y) \cdot f(x_i, y_j) \quad \text{se } (X, Y) \text{ é uma v.a. discreta,}$$

Uma outra fórmula para calcular a covariância é

$$\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X] E[Y].$$

onde

$$E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j f(x_i, y_j) \quad \text{se } (X, Y) \text{ é uma v.a. discreta,}$$

## Propriedades da Covariância:

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias e  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  constantes reais,

- $X$  e  $Y$  são variáveis independentes  $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$

(Nota: O recíproco pode não ser verdadeiro. O facto de  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  não implica a independência entre  $X$  e  $Y$ , pode existir uma ligação não linear entre as variáveis.);

- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}[X]$ ;
- $\text{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\text{Cov}(X, Y)$ .

# Coefficiente de Correlação do Par Aleatório

- **Coefficiente de correlação:**

O **coeficiente de correlação** é definido como:

$$\rho = \rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

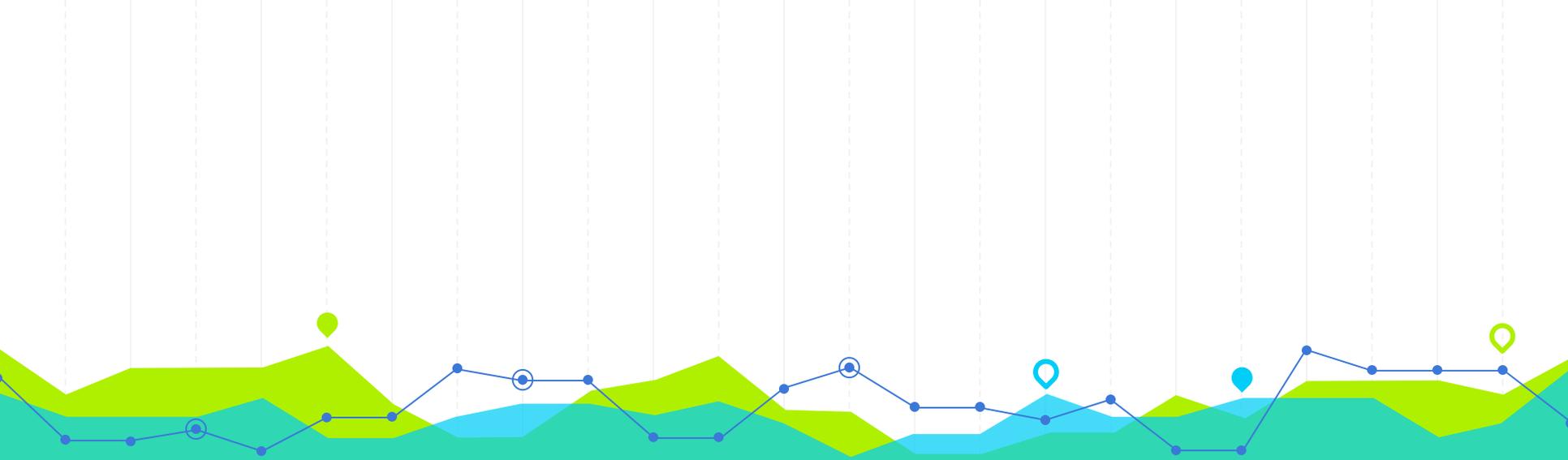
**Propriedades do coeficiente de correlação:**

Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias e  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  constantes reais,

- $-1 < \rho_{X,Y} < 1$ ;
- Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes, então  $\rho_{X,Y} = 0$ ;
- O coeficiente de correlação não se altera quando as variáveis sofrem uma transformação linear positiva, ou seja,

$$\rho_{aX+b,cY+d} = \rho_{X,Y}$$

se  $ac > 0$ .



# Pares Aleatórios Discretos: Exercícios

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;  
Independência; Covariância e Correlação

# 2

**5.1** Uma loja de electrodomésticos vende televisores da marca  $X$  e da marca  $Y$ . A função de probabilidade conjunta do número de televisores vendidos diariamente é a seguinte:

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

- Calcule as funções de probabilidade marginais de  $X$  e de  $Y$ .
- Calcule a função de distribuição marginal de  $X$ .
- Calcule a probabilidade de que num dia a marca  $Y$  seja mais vendida do que a marca  $X$ .
- Determine o valor esperado e a variância do número total de televisores vendidos diariamente.



# Exercício 5.1 (a): Funções de Probabilidade Marginais

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(Y=0)$   
 $0.12 + 0.25 + 0.13 = 0.5$   
 $P(Y=1)$   
 $0.05 + 0.30 + 0.01 = 0.36$   
 $P(Y=2)$   
 $0.03 + 0.10 + 0.01 = 0.14$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x = 0 \\ 0.65, & x = 1; \\ 0.15, & x = 2 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.5, & y = 0 \\ 0.36, & y = 1 \\ 0.14, & y = 2 \end{cases}$$

## Exercício 5.1 (b): Função de Distribuição

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= 0.12 + 0.25 + 0.13 = 0.5 \\ P(Y=1) &= 0.05 + 0.30 + 0.01 = 0.36 \\ P(Y=2) &= 0.03 + 0.10 + 0.01 = 0.14 \end{aligned}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x=0 \\ 0.65, & x=1; \\ 0.15, & x=2 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leq x < 1 \\ 0.85, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

## Exercício 5.1 (c): Função de Probabilidade

Y \ X	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(Y=2)$   
 $0.12 + 0.25 + 0.13 = 0.5$   
 $0.05 + 0.30 + 0.01 = 0.36$   
 $0.03 + 0.10 + 0.01 = 0.14$

$$P(Y > X) = P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=2) = 0,05 + 0,03 + 0,1 = 0,18$$

## Exercício 5.1 (d): Valor Médio e Variância da Soma

Y \ X	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= 0.12 + 0.25 + 0.13 = 0.5 \\ P(Y=1) &= 0.05 + 0.30 + 0.01 = 0.36 \\ P(Y=2) &= 0.03 + 0.10 + 0.01 = 0.14 \end{aligned}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2, & x=0 \\ 0.65, & x=1; \\ 0.15, & x=2 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.5, & y=0 \\ 0.36, & y=1 \\ 0.14, & y=2 \end{cases}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0,95 + 0,64 = 1,59$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X+Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \times \text{Cov}(X, Y) \\ &= (1,25 - 0,95^2) + (0,92 - 0,64^2) + 2 \times (0,56 - 0,95 \times 0,64) = 0,7619 \end{aligned}$$

# Pares Aleatórios: Função de Probabilidade Condicional

Considere-se a função de probabilidade conjunta  $f(x,y)$  apresentada abaixo. Determine a função de probabilidade condicional de  $X$  dado que  $Y=1$ .

Caracterização Condicional

[ exp. 2:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  ]

Tomando como "inspiração" esta fórmula, vamos definir probabilidades e momentos condicionados:

i) Pda condicional de  $X$  em  $Y$

$$P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} \quad \forall x, y$$

Y \ X	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$$P(Y=2)$$

$$0.12 + 0.25 + 0.13 = 0.5$$

$$0.05 + 0.30 + 0.01 = 0.36$$

$$0.03 + 0.10 + 0.01 = 0.14$$

Exemplo:

$$P(X=x|Y=1) = \frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{0.05}{0.36} & x=0 \\ \frac{0.30}{0.36} & x=1 \\ \frac{0.01}{0.36} & x=2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

# Pares Aleatórios: Função de Distribuição Condicional

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$P(Y=2)$   
 $0.12 + 0.25 + 0.13 = 0.5$   
 $0.05 + 0.30 + 0.01 = 0.36$   
 $0.03 + 0.10 + 0.01 = 0.14$

À partir destas probabilidades condicionais, podemos definir:

- Função de distribuição condicional de  $x$  em  $y$

# Pares Aleatórios: Função de Distribuição Condicional

Exemplo:  $F_{x|y=1}(x) = P(X \leq x | Y=1)$

$$[F_x(x) = P(X \leq x)]$$

$$= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{0.05}{0.36} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{0.05+0.30}{0.36} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Y \ X	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$$P(X \leq 1.3 | Y=0) = \frac{P(X \leq 1.3, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{0.12+0.25}{0.5}$$

$$P(X \leq 1.3 | Y=1) = F_{x|y=1}(1.3) = \frac{0.05+0.30}{0.36}$$

# Pares Aleatórios: Valores Esperados Condicionais

Valores esperados condicionados

$$E[X|Y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x P(X=x|Y=y)$$

Exemplo:  $E[X|Y=1] = \sum_{x=0}^2 x P(X=x|Y=1)$

Exemplo:

$$P(X=x|Y=1) = \frac{P(X=x, Y=1)}{P(Y=1)} = \begin{cases} \frac{0.05}{0.36} & x=0 \\ \frac{0.30}{0.36} & x=1 \\ \frac{0.01}{0.36} & x=2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$= 0 \times \frac{0.05}{0.36} +$$

$$1 \times \frac{0.30}{0.36} + 2 \times \frac{0.01}{0.36}$$

# Pares Aleatórios: Variâncias Condicionais

$$E[x^2|y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(x=x|y=y)$$

$$E[g(x)|y=y] = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g(x) P(x=x|y=y)$$

Em particular:

$$\text{var}(x|y=y) = E[x^2|y=y] - E^2[x|y=y]$$

Nota: idênticas definições (decididamente adaptadas para o caso de  $y$  condicionado em  $x$ )

# Função de Distribuição Conjunta

Dada uma v.a. bidimensional (par aleatório)  $(X,Y)$ , discreta, a função de distribuição conjunta de  $(X,Y)$  é definida da seguinte forma:

$$F(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j),$$

e satisfaz as seguintes condições:

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x,y) = 0$ , com  $y$  fixo;
2.  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x,y) = 0$ , com  $x$  fixo;
3.  $\lim_{x,y \rightarrow -\infty} F(x,y) = 0$ ;
4.  $\lim_{x,y \rightarrow +\infty} F(x,y) = 1$ ;
5.  $0 \leq F(x,y) \leq 1, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ;
6.  $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2), \forall x_1 < x_2, y_1 < y_2$

# Função de Distribuição Conjunta

A partir de probabilidades conjuntas podemos definir a função de distribuição conjunta:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

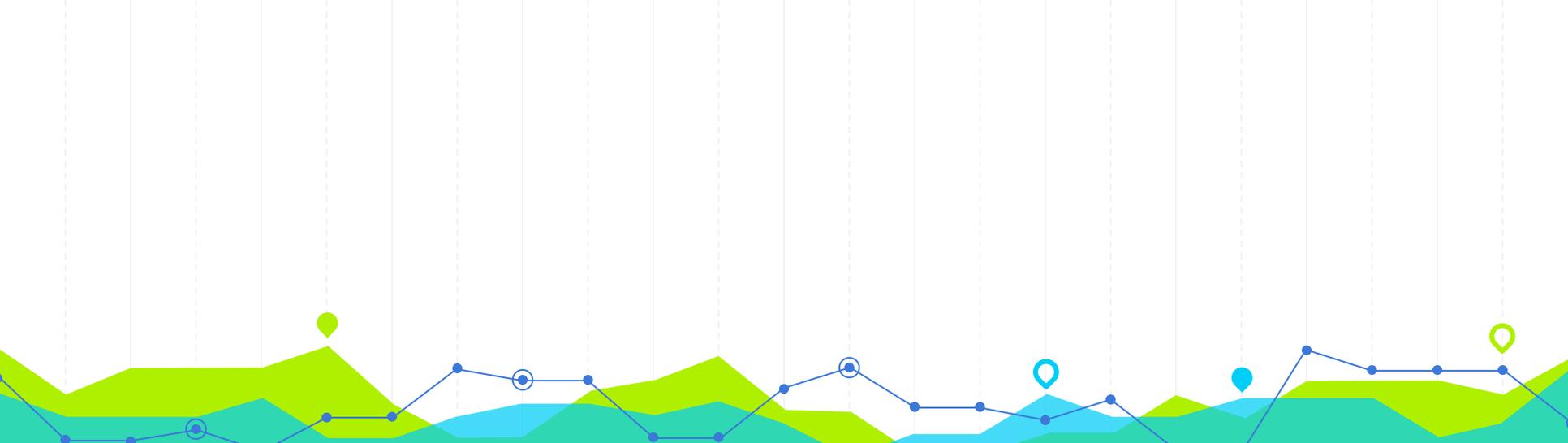
Exemplo:

$Y \setminus X$	0	1	2
0	0.12	0.25	0.13
1	0.05	0.30	0.01
2	0.03	0.10	0.01

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(1,1) &= P(X \leq 1, Y \leq 1) \\ &= \sum_{x \leq 1} \sum_{y \leq 1} P(X=x, Y=y) \\ &= 0.12 + 0.25 + 0.05 + 0.30 \end{aligned}$$

Em termos de propriedades, tem propriedades semelhantes à f. distribuição para uma v.c., tendo em linha de conta que agora temos 2 v.c.

Nota: tal como no caso univariado, podemos calcular  $F_{X,Y}(x,y) \forall x,y$  (temos vários



# Pares Aleatórios Contínuos

Distribuição Conjunta, Marginais e Condicionais;  
Independência; Covariância e Correlação

# 3

# Função Densidade de Probabilidade Conjunta

A função  $f(x, y)$  é uma função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias  $x$  e  $y$  se:

1.  $f(x, y) \geq 0$  p/ todos  $(x, y)$
2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$
3.  $P[(X, Y) \in A] = \iint f(x, y) dx dy$  para qualquer região  $A$  no plano  $xy$ .

[www.cearidus.ufc.br/Arquivo](http://www.cearidus.ufc.br/Arquivo)

# Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

Uma fábrica de doces distribuiu caixas de chocolates com mistura de creme, toffees e amêndoas, envolta em chocolate branco e marrom. Para uma caixa selecionada ao acaso, seja  $x$  e  $y$ , respectivamente, a proporção de chocolate branco e marrom existente no creme e suponha que f.d.p. conjunta é:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

A função  $f(x,y)$  é uma fdp conjunta?

# Função Densidade de Probabilidade Conjunta: Exemplo

A função  $f(x,y)$  é uma fdp conjunta?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{5} (2x + 3y) \, dx \, dy$$

⇒ integra em relação a "x"; depois em relação a "y".

$$= \frac{2}{5} \int_0^1 \left( \int_0^1 2x \, dx + \int_0^1 3y \, dx \right) dy$$

$$= \frac{2}{5} \int_0^1 \left( 2 \frac{x^2}{2} \int_0^1 + 3yx \int_0^1 \right) dy$$

$$= \frac{2}{5} \int_0^1 (1 + 3y) dy$$

$$= \frac{2}{5} \left[ \int_0^1 dy + \int_0^1 3y \, dy \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[ y \int_0^1 + \frac{3y^2}{2} \int_0^1 \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[ 1 + \frac{3}{2} \right] = \frac{2}{5} \left[ \frac{2+3}{2} \right] = 1 \quad \text{c.q.d!}$$

# Funções Densidade de Probabilidade Marginais

$$g(x) = \sum_y f(x, y) \quad e \quad h(y) = \sum_x f(x, y) \quad \text{variável discreta}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad e \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad \text{variável contínua}$$

[www.cearidus.ufc.br/Arquivo](http://www.cearidus.ufc.br/Arquivo)

# Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta  $f(x,y)$  apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de  $X$  definida por  $g(x)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

[www.cearidus.ufc.br/Arquivo](http://www.cearidus.ufc.br/Arquivo)

Por definição a distribuição de probabilidade marginal de  $x$  é dada por:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y) dy = \frac{2}{5} \left[ 2xy \Big|_0^1 + \frac{3y^2}{2} \Big|_0^1 \right]$$

$$= \frac{2}{5} \left[ 2x + \frac{3}{2} \right] = \frac{4x}{5} + \frac{3}{5}$$

$$\therefore g(x) = \frac{4x+3}{5}$$

ou seja:

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \frac{4x+3}{5} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

# Funções Densidade de Probabilidade Marginais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta  $f(x,y)$  apresentada abaixo. Determine a fdp marginal de  $Y$  definida por  $h(y)$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{outro valor} \end{cases}$$

[www.cearidus.ufc.br/Arquivo](http://www.cearidus.ufc.br/Arquivo)

$$\begin{aligned} h(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 (2x + 3y) dx \\ &= \frac{2}{5} \left[ \frac{2x^2}{2} \Big|_0^1 + 3yx \Big|_0^1 \right] = \frac{2}{5} [1 + 3y] \\ &= \frac{2 + 6y}{5} \end{aligned}$$

ou seja:

$$h(y) = \begin{cases} \frac{2+6y}{5} & p/ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \end{cases}$$

# Funções Densidade de Probabilidade Condicionais

Sabemos que:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

Definindo:

$A \rightarrow$  o evento onde  $X = x$

$B \rightarrow$  o evento onde  $Y = y$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad \text{e} \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad \text{variável contínua}$$

Temos que:

$$P(Y = y / X = x) = \frac{f(x, y)}{g(x)}$$

ou ainda

$$P(X = x / Y = y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$$

# Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta  $f(x,y) = 10xy^2$   $0 < x < y < 1$

a) Determine as fdp's marginais de X e Y definidas por  $g(x)$  e  $h(y)$ , respectivamente.

b) Determine a função densidade condicional de  $Y|X$ .

c) Calcule  $P(Y > 0,5 \mid X = 0,25)$

a)

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^1 10xy^2 dy$$
$$= \frac{10xy^3}{3} \Big|_x^1 = \frac{10x}{3} (1 - x^3) = \frac{10x - 10x^4}{3}$$

$$g(x) = \frac{10x}{3} \Big|_x^1 = \frac{10x}{3} (1 - x^3), \quad 0 < x < 1$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{x=0}^{x=y} 10xy^2 dx = \frac{10y^2 \cdot x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=y}$$
$$= 5y^2 (y^2 - 0) = 5y^4$$

$$h(y) = 5y^4, \quad 0 < y < 1$$

# Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta  $f(x,y) = 10xy^2$   $0 < x < y < 1$

a) Determine as fdp's marginais de X e Y definidas por  $g(x)$  e  $h(y)$ ,  
respetivamente.

b) Determine a função densidade condicional de Y|X.

c) Calcule  $P(Y > 0,5 \mid X = 0,25)$

b)

$f(y/x)$

$$\text{por definição } f(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$$

$$= \frac{3 \cdot 10xy^2}{10x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)}, \quad 0 < x < y < 1$$

# Funções Densidade de Probabilidade Condicionais: Exemplo

Considere-se a fdp conjunta  $f(x,y) = 10xy^2$   $0 < x < y < 1$

a) Determine as fdp's marginais de X e Y definidas por  $g(x)$  e  $h(y)$ , respectivamente.

b) Determine a função densidade condicional de Y|X.

c) Calcule  $P(Y > 0,5 \mid X = 0,25)$

c)

$$P\left(y > \frac{1}{2} \mid x = 0,25\right)$$

Por definição:

$$P(a < y < b \mid X = x) = \int_a^b f(y/x).dy$$

$f(y/x)$

por definição  $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{g(x)} = \frac{10xy^2}{\frac{10}{3}x(1-x^3)}$

$$= \frac{3 \cdot 10xy^2}{10x(1-x^3)} = \frac{3y^2}{(1-x^3)} \quad , \quad 0 < x < y < 1$$

$$P(a < y < b \mid X = x) = \int_a^b f(y/x).dy$$

$$= \int_{1/2}^1 \frac{3y^2}{(1-0,25^3)} dy = \frac{3}{(1-0,25^3)} \int_{1/2}^1 y^2 dy = \frac{3}{(1-0,25^3)} \frac{y^3}{3} \Big|_{1/2}^1$$

$$= \frac{1}{(1-0,25^3)} \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{8}\right)}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{\frac{8-1}{8}}{\frac{64-1}{64}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{63}{64}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{64}{63} = \frac{53}{63} = \frac{8}{9}$$

# Função de Distribuição Conjunta

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A

# Funções de Distribuição Marginais

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y f_Y(u) du$$

Distribuições Conjuntas de Probabilidade | Resumos LEIC-A

# Obrigada!

Questões?

